Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

14. November 2025

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde 15 Minuten

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

8825 – 7178

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 26]

Die folgende Fragestellung befasst sich mit den Eigenschaften zusammengesetzter trigonometrischer Funktionen, wie z. B $\sin(\sin x)$ **,** $\sin(\sin(\sin x))$.

$S_n(x)$ bezeichne die $n-1$ Mal in sich selbst geschachtelte Funktion $\sin x$, die für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, mit $0 \leq x \leq 2\pi$ definiert ist.

Zum Beispiel sind $S_1(x) = \sin x$ und $S_2(x) = \sin(\sin x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$.

(a) Skizzieren und beschriften Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen von $y = S_1(x)$ und $y = S_2(x)$. Beschriften Sie in Ihrer Skizze die Werte der Schnittpunkte mit den Achsen. [4]

(b) Bestimmen Sie die maximalen Werte von

(i) $S_1(x)$; [1]

(ii) $S_2(x)$; [1]

(iii) $S_3(x)$. [1]

(c) Finden Sie den kleinsten Wert von n , für den der Maximalwert von $S_n(x)$ kleiner als $0{,}6$ ist. [3]

Betrachten Sie nun den Graphen von $y = S_2(x)$.

(d) Zeigen Sie unter Berücksichtigung der Gleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, dass es genau zwei Punkte mit der Steigung Null gibt, einen bei $x = \frac{\pi}{2}$ und einen bei $x = \frac{3\pi}{2}$. [6]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Die Ableitung $S_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S_n(x)\right)$ kann als Produkt von Kosinusfunktionen wie folgt ausgedrückt werden:

$$S'_n(x) = \cos\left(S_{n-1}(x)\right)\cos\left(S_{n-2}(x)\right) \ldots \cos\left(S_1(x)\right)\cos x\,.$$

(e) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $S'_3(x) = \cos\left(\sin(\sin x)\right)\cos(\sin x)\cos x$. [1]

(f) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$S'_n(x) = \cos\left(S_{n-1}(x)\right)\cos\left(S_{n-2}(x)\right) \ldots \cos\left(S_1(x)\right)\cos x.$ [6]

(g) Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass gilt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{S_n(x)}{x} = 1$, für $n \in \mathbb{Z}^+$. [3]

2. [Maximale Punktzahl: 29]

Bei der folgenden Frage werden mit Hilfe von Maclaurinschen Reihen Näherungen von mathematischen Konstanten und die Genauigkeit solcher Näherungen untersucht.

(a) Es sei $|x| < 1$. Finden Sie den Wert der unendlichen geometrischen Reihe $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. [2]

(b) Zeigen Sie durch Integration und unter Nutzung der Vorarbeit, dass die Maclaurinsche Reihe von $\arctan x$ ausgedrückt werden kann als $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$. [3]

(c) Finden Sie mit Hilfe von $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und den ersten **drei** (von Null verschiedenen) Termen der Maclaurinschen Reihe von $\arctan x$ eine auf drei Dezimalstellen genaue Näherung für π. [3]

Die Maclaurinsche Reihe von $\arctan x$ ist ein Beispiel für eine alternierende Reihe, d. h. eine Reihe, in der aufeinanderfolgende Terme abwechselnd positiv bzw. negativ sind. Betrachten Sie den folgenden Satz.

Satz: Bei alternierenden Reihen mit Termen abnehmender Größe ist der Fehler durch Berechnung einer endlichen Anzahl von Termen kleiner oder gleich dem Absolutwert des nächsten Terms in der Reihe.

Gemäß dieses Satzes ist der maximale Fehler bei Nutzung der ersten drei (von Null verschiedenen) Termen als Näherung für $\arctan x$ gegeben durch $\left|-\frac{x^7}{7}\right|$. Mit anderen Worten: $\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right| \le \left|-\frac{x^7}{7}\right|$.

(d) Bestimmen Sie, wie viele (von Null verschiedene) Terme der Reihe herangezogen werden müssen, damit der Fehler bei der Annäherung von $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ weniger als $0{,}0001$ beträgt. [3]

(e) Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration, dass $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. [4]

(f) Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) \mathrm{d}x$ und geben Sie Ihre Antwort auf sechs Dezimalstellen genau an. [2]

(g) Finden Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilen (e) und (f) einen Näherungswert für π. Geben Sie Ihre Antwort auf vier Dezimalstellen genau an. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \right) \mathrm{d}x$ kann als Summe alternierender Terme betrachtet werden.

Also: $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^3}{3} \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x^5}{5} \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^7}{7} \right) \mathrm{d}x + \ldots$.

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, \mathrm{d}x$ lässt sich durch die Summe der ersten vier definitiven Integrale näherungsweise berechnen.

(h) Verifizieren Sie, dass der in Teil (d) vorgestellte Satz in diesem Fall gilt. [5]

Angenommen, der maximale Fehler bei der Annäherung an $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, \mathrm{d}x$ dürfe höchstens 1×10^{-6} betragen.

(i) Bestimmen Sie dazu die kleinste zu nutzende Anzahl an (von Null verschiedenen) Termen der Maclaurinschen Reihe für $\arctan x$. [5]