

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

3. Klausur

14. November 2025

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde 15 Minuten

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 26]

Die folgende Fragestellung befasst sich mit den Eigenschaften zusammengesetzter trigonometrischer Funktionen, wie z. B. $\sin(\sin x)$, $\sin(\sin(\sin x))$.

$S_n(x)$ bezeichne die $n - 1$ Mal in sich selbst geschachtelte Funktion $\sin x$, die für $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, mit $0 \leq x \leq 2\pi$ definiert ist.

Zum Beispiel sind $S_1(x) = \sin x$ und $S_2(x) = \sin(\sin x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$.

(a) Skizzieren und beschriften Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen von $y = S_1(x)$ und $y = S_2(x)$. Beschriften Sie in Ihrer Skizze die Werte der Schnittpunkte mit den Achsen. [4]

(b) Bestimmen Sie die maximalen Werte von

(i) $S_1(x)$; [1]

(ii) $S_2(x)$; [1]

(iii) $S_3(x)$. [1]

(c) Finden Sie den kleinsten Wert von n , für den der Maximalwert von $S_n(x)$ kleiner als 0,6 ist. [3]

Betrachten Sie nun den Graphen von $y = S_2(x)$.

(d) Zeigen Sie unter Berücksichtigung der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, dass es genau zwei Punkte mit der Steigung Null gibt, einen bei $x = \frac{\pi}{2}$ und einen bei $x = \frac{3\pi}{2}$. [6]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Die Ableitung $S'_n(x) = \frac{d}{dx}(S_n(x))$ kann als Produkt von Kosinusfunktionen wie folgt ausgedrückt werden:

$$S'_n(x) = \cos(S_{n-1}(x)) \cos(S_{n-2}(x)) \dots \cos(S_1(x)) \cos x .$$

(e) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $S'_3(x) = \cos(\sin(\sin x)) \cos(\sin x) \cos x$. [1]

(f) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{Z}^+$ gilt:

$$S'_n(x) = \cos(S_{n-1}(x)) \cos(S_{n-2}(x)) \dots \cos(S_1(x)) \cos x. \quad [6]$$

(g) Zeigen Sie mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_n(x)}{x} = 1$, für $n \in \mathbb{Z}^+$. [3]

2. [Maximale Punktzahl: 29]

Bei der folgenden Frage werden mit Hilfe von Maclaurinschen Reihen Näherungen von mathematischen Konstanten und die Genauigkeit solcher Näherungen untersucht.

- (a) Es sei $|x| < 1$. Finden Sie den Wert der unendlichen geometrischen Reihe $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. [2]
- (b) Zeigen Sie durch Integration und unter Nutzung der Vorarbeit, dass die Maclaurinsche Reihe von $\arctan x$ ausgedrückt werden kann als $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$. [3]
- (c) Finden Sie mit Hilfe von $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und den ersten **drei** (von Null verschiedenen) Termen der Maclaurinschen Reihe von $\arctan x$ eine auf drei Dezimalstellen genaue Näherung für π . [3]

Die Maclaurinsche Reihe von $\arctan x$ ist ein Beispiel für eine alternierende Reihe, d. h. eine Reihe, in der aufeinanderfolgende Terme abwechselnd positiv bzw. negativ sind. Betrachten Sie den folgenden Satz.

Satz: Bei alternierenden Reihen mit Termen abnehmender Größe ist der Fehler durch Berechnung einer endlichen Anzahl von Termen kleiner oder gleich dem Absolutwert des nächsten Terms in der Reihe.

Gemäß dieses Satzes ist der maximale Fehler bei Nutzung der ersten drei (von Null verschiedenen) Termen als Näherung für $\arctan x$ gegeben durch $\left| -\frac{x^7}{7} \right|$. Mit anderen Worten: $\left| \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \right| \leq \left| -\frac{x^7}{7} \right|$.

- (d) Bestimmen Sie, wie viele (von Null verschiedene) Terme der Reihe herangezogen werden müssen, damit der Fehler bei der Annäherung von $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ weniger als 0,0001 beträgt. [3]
- (e) Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration, dass $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$. [4]
- (f) Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) dx$ und geben Sie Ihre Antwort auf sechs Dezimalstellen genau an. [2]
- (g) Finden Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den Teilen (e) und (f) einen Näherungswert für π . Geben Sie Ihre Antwort auf vier Dezimalstellen genau an. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) dx$ kann als Summe alternierender Terme betrachtet werden.

Also: $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \right) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x \, dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^3}{3} \right) dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x^5}{5} \right) dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^7}{7} \right) dx + \dots$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, dx$ lässt sich durch die Summe der ersten vier definitiven Integrale näherungsweise berechnen.

(h) Verifizieren Sie, dass der in Teil (d) vorgestellte Satz in diesem Fall gilt. [5]

Angenommen, der maximale Fehler bei der Annäherung an $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, dx$ dürfe höchstens 1×10^{-6} betragen.

(i) Bestimmen Sie dazu die kleinste zu nutzende Anzahl an (von Null verschiedenen) Termen der Maclaurinschen Reihe für $\arctan x$. [5]
